

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

多变量微积分笔记16——格林公式

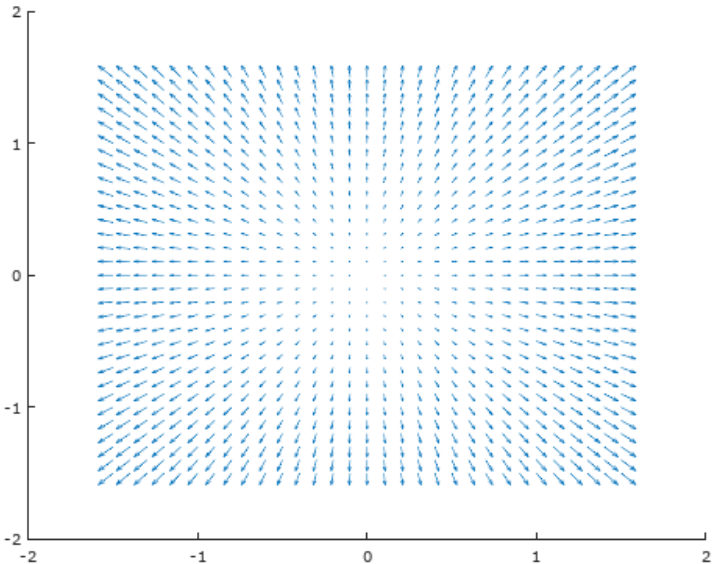
旋度

场向量的旋度衡量的是运动的旋转部分，它表达的是在给定点上扭转程度的大小，用数学符号表示就是：

$$\text{curl}(\vec{F}) = N_x - M_y$$

旋度的大小表示扭转程度，正负表示旋转是顺时针还是逆时针。由上一章可知，在保守中旋度为0。

举例来说，如果气流或水流的旋度为0，表示没有涡流， $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ：



$$\text{curl}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = N_x - M_y = 0$$

$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 实际上是一个逆时针匀速转动的向量场，其旋度为2：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

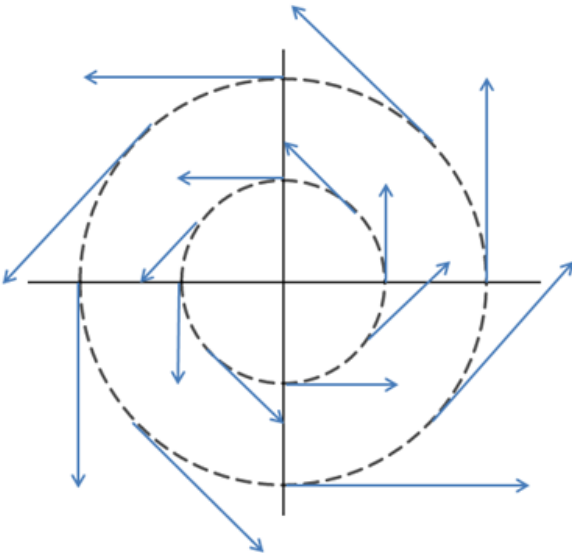
- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

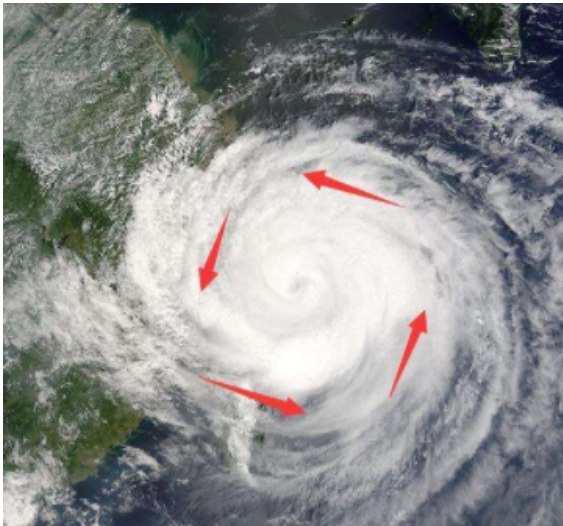
最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



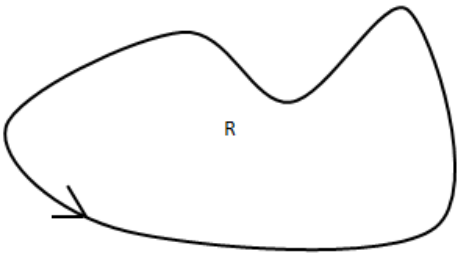
$$curl(-y\hat{i} + x\hat{j}) = N_x - M_y = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} = 2$$

在复杂运动中，一些点的旋转可能比其他点多，此时旋度不是常数，它依赖于点所处的位置，也就是x和y的值。气象图中，高旋度的地方可能是台风或龙卷风：



在力场中，旋度衡量的是任意一点所受的扭矩，或者说扭矩是力转动的对应量。

格林公式



$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = ?$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustinU

如上图所示，在向量场中有一条闭合曲线C，其所围成的区域是R，如果要计算C的线积分，有两种选择，一种是直接计算，另一种是使用格林公式。

格林公式是另一种可以避免计算线积分的方法。格林公式是这样描述的：在处处有定义且处处可导的向量场 $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ 中，逆时针方向的闭合曲线C围成的区域是R，则C的线积分等于区域R上对旋度 $\text{curl}(\mathbf{F})$ 的二重积分：

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_R \text{curl}(\vec{F}) dA$$

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R (N_x - M_y) dA$$

这是个奇特的结论，左侧的线积分定义在曲线上，而右侧的二重积分定义的是曲线内部的区域。之所以规定曲线是逆时针，是基于旋度的定义，如果曲线是顺时针，那么等式右侧就是 $\iint_R (M_y - N_x) dA$ 。实际上格林公式也与保守场互相佐证，如果是保守场， $M_y - N_x = 0$ ，等式右侧的二重积分为0。

公式的由来

这个怪异的公式是如何得到的呢？

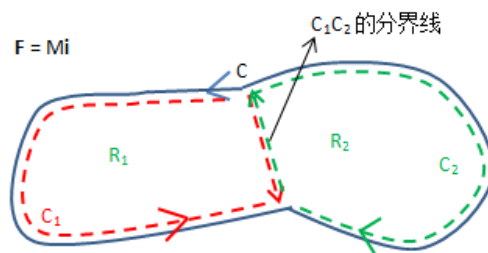
点在场中的闭合曲线C上逆时针运动，尝试一个简化问题的验证，假设场是 $\mathbf{F} = M\mathbf{i}$ ，也就是 $N = 0$ ，那么现在需要证明的是：

$$\oint_C Mdx = \iint_R -M_y dA$$

如果上式成立，则同理可证：

$$\oint_C Ndy = \iint_R N_x dA$$

明确目标后先来看一个图示：



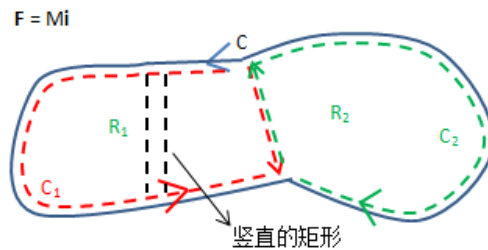
将C围成的闭合区域拆分成 C_1 和 C_2 两部分，它们都是逆时针方向。将 C_1 和 C_2 的线积分相加，将比C的线积分多计算了两次分界线。注意分界线上 C_1 和 C_2 的方向，发现二者相反，所以在分界线上二者抵消，故：

$$\oint_C Mdx = \oint_{C_1} Mdx + \oint_{C_2} Mdx$$

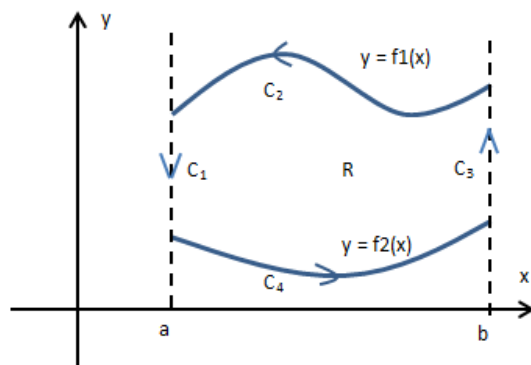
如果格林公式成立，则：

$$\begin{aligned}
 \oint_C M dx &= \oint_{C_1} M dx + \oint_{C_2} M dx \\
 &= - \iint_{R_1} M_y dA - \iint_{R_2} M_y dA \\
 &= - \iint_R M_y dA
 \end{aligned}$$

由此推广，对于更复杂的曲线，总是可以分成多个相对简单小区域，如果格林公式成立，则曲线的线积分等于所有小区域的双重积分之和。对于简单的小区域，可以划分成无数个竖直的矩形：



将矩形放大：



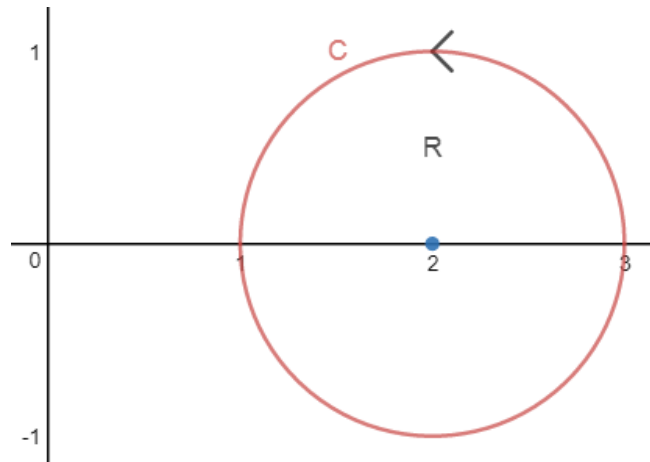
$C_1 C_2 C_3 C_4$ 是矩形的四个边， C_2 和 C_4 的曲线分别是 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$ ，上图中：

on C_1 and C_3 , $dx = 0$

$$\begin{aligned}
 \oint_C M dx &= \int_{C_1} M dx + \int_{C_2} M dx + \int_{C_3} M dx + \int_{C_4} M dx \\
 &= \int_{C_2} M dx + \int_{C_4} M dx \\
 &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\
 &= - \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\
 \iint_R -M_y dA &= - \int_a^b \underbrace{\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy}_{M(x,y)} dx \\
 &= - \int_a^b (M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))) dx \\
 &= - \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\
 &= \oint_C M dx
 \end{aligned}$$

至此，达到了最初的目标，所以格林公式成立。

使用示例



如上图所示，C是逆时针旋转的半径为1的圆，计算C在场中的线积分：

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \oint_C \left(ye^{-x} dx + \left(\frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) dy \right) = ?$$

首先尝试直接结算，判断一下场是否是保守场：

$$\begin{aligned}
 M_y &= \frac{\partial}{\partial y} ye^{-x} = e^{-x}, & N_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) = x + e^{-x} \\
 M_y &\neq N_x
 \end{aligned}$$

对x和y参数化：

$$\begin{aligned}
 x &= 2 + \cos\theta, & y &= \sin\theta \\
 dx &= -\sin\theta d\theta, & dy &= \cos\theta d\theta
 \end{aligned}$$

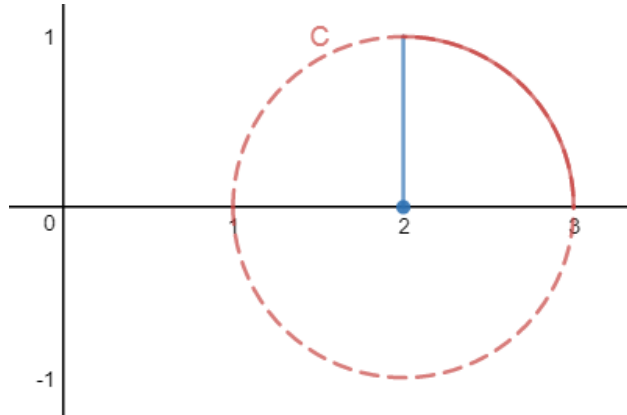
代入后将得到令人抓狂的结果：

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \oint_0^{2\pi} -\sin^2\theta e^{-2-\cos\theta} d\theta + \frac{((2+\cos\theta)^2 - e^{-2-\cos\theta})}{2} \cos\theta d\theta$$

现在改用格林公式：

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_R (N_x - M_y) dA = \iint_R (x + e^{-x} - e^{-x}) dA = \iint_R x dA$$

这是个不错的结果。为了避免计算复杂的积分域，所以积分域取1/4圆：



$$\begin{aligned} \iint_{\frac{R}{4}} x dA &= \int_2^3 \int_{\sqrt{1-(x-2)^2}}^0 x dy dx = \int_2^3 -x \sqrt{1-(x-2)^2} dx \\ x &= \cos\theta + 2, \quad dx = -\sin\theta d\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -x \sqrt{1-(x-2)^2} dx &= -(\cos\theta + 2)(\sqrt{1-\cos^2\theta})(-\sin\theta d\theta) \\ &= \cos\theta \sin\theta d\theta + 2\sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta + 2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\frac{R}{4}} x dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= -\frac{\cos 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\iint_R x dA = 4 \iint_{\frac{R}{4}} x dA = 2\pi$$

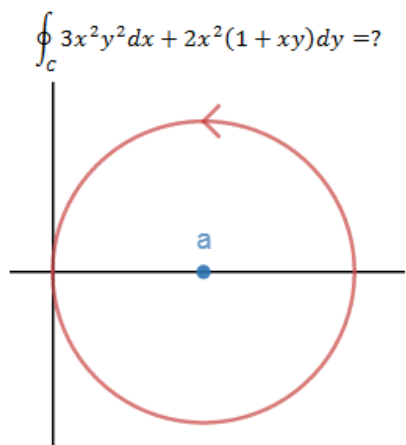
还有一种更简单的计算方式：

$$\iint_R x dA = \underbrace{Area(R)}_{\pi} \times \underbrace{\bar{x}}_{\frac{2}{2}} = 2\pi$$

综合示例

示例1

场中的逆时针路径C是半径为a，圆心在x轴上的圆，计算：



$$\oint_C \underbrace{3x^2y^2}_{M} dx + \underbrace{2x^2(1+xy)}_N dy$$

$$N_x = \frac{\partial}{\partial x} 2x^2(1+xy) = 4x + 6x^2y$$

$$M_y = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^2 = 6x^2y$$

$$\iint_R (N_x - M_y) dA = \iint_R 4x dA = 4 \underbrace{\text{Area}(R)}_{a^2\pi} \underbrace{\bar{x}}_a = 4a^3\pi$$

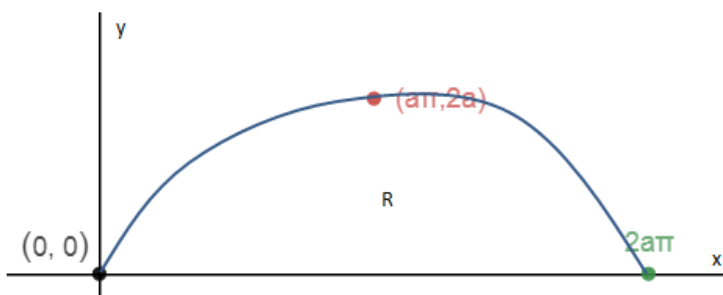
示例2

摆线的参数方程： $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, $y \geq 0$, 计算摆线与x轴围成的面积。

首先用描点法画出草图：

$$a > 0, y \geq 0 \Rightarrow 1 - \cos\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

$$\theta = 0, x = 0, y = 0; \theta = \pi, x = a\pi, y = 2a; \theta = 2\pi, x = 2a\pi, y = 0$$



$$\text{Area}(R) = \iint_R dA$$

根据格林公式：

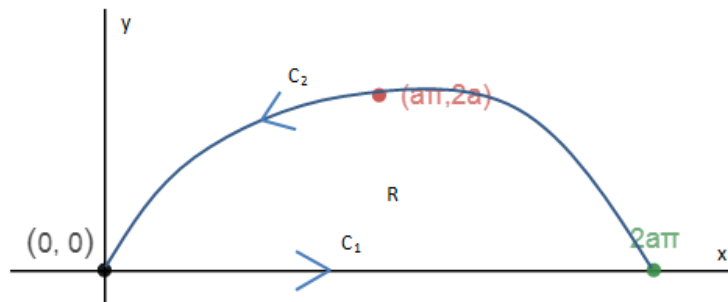
$$\iint_R dA = \iint_R (N_x - M_y) dA = \oint_C (Mdx + Ndy)$$

其中的两种可能是：

$$1) M_y = 0, N_x = 1 \Rightarrow M = 0, N = x \Rightarrow \iint_R dA = \oint_C x dy$$

$$2) M_y = -1, N_x = 0 \Rightarrow M = -y, N = 0 \Rightarrow \iint_R dA = \oint_C -y dx$$

现在将二重积分变成了线积分，如下图所示， $C = C_1 + C_2$ ：



由于x的积分限更好确定，所以使用第二种解：

on C_1 $y = 0$

$$\oint_C -y dx = \int_{C_1} -y dx + \int_{C_2} -y dx = \int_{2\pi}^0 -y dx = - \int_0^{2\pi} y dx$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} a(\theta - \sin\theta) = a - a\cos\theta, \quad dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$y dx = a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y dx &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= a^2 \left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 3a^2\pi \end{aligned}$$

$$\text{Area}(R) = 3a^2\pi$$

三角函数的积分可参考《[数学笔记20——三角替换1 \(sin和cos\)](#)》

示例3

是否存在闭合曲线C，能够使下面的积分取最小非负值？

$$\oint_C -(x^2 y + 3x - 2y) dx + (4y^2 x - 2x) dy$$

当C压缩成一点的时候，线积分会有最小值，但是最小值可能是负数，最小的非负值是什么？正负转换的边界曲线又是什么？

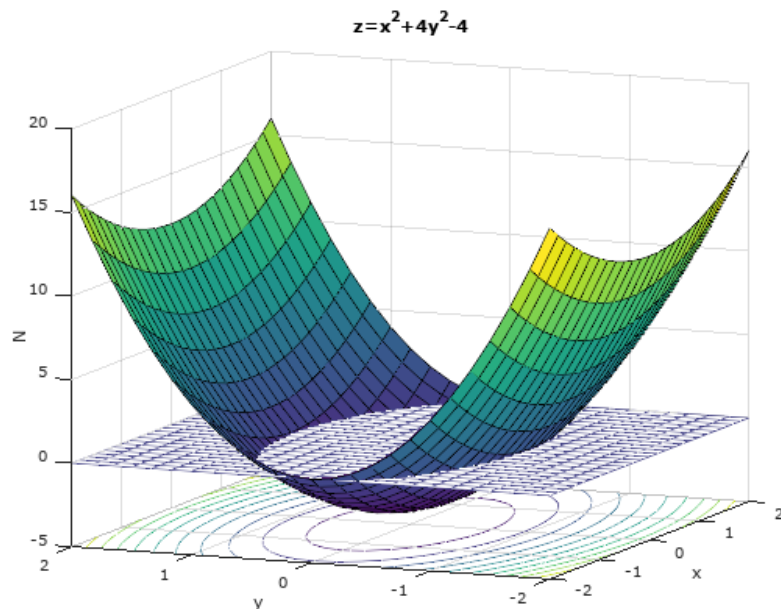
还是使用格林公式将线积分转换为二重积分：

$$N_x = \frac{\partial}{\partial x}(4y^2x - 2x) = 4y^2 - 2$$

$$-M_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 3x - 2y) = x^2 - 2$$

$$\oint_C = \iint_R (N_x - M_y) dA = \iint_R (4y^2 + x^2 - 4) dx dy$$

二重积分的被积函数是椭圆，从几何意义看来，积分最小时应当取面积最小的椭圆：



根据几何意义，二重积分是曲面与曲面在xy轴的投影所围成的体积，当 $z = 4y^2 + x^2 - 4 < 0$ 时，体积是负值，所以此时线积分也是负值。正负的边缘就是 $g = 4y^2 + x^2 - 4 = 0$ ，g所围成的面积是椭圆，所以曲线g就是所要寻找的线积分路径C。

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [格林公式](#), [旋度](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

0

 推荐

0

 反对

« 上一篇: [多变量微积分笔记15——梯度场和势函数](#)
» 下一篇: [概率笔记3——几何概型](#)

posted on 2018-04-24 18:18 [我是8位的](#) 阅读(4725) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】[华为 HWD 2022 故事征集](#), 分享最打动你的科技女性故事
【推荐】[华为开发者专区](#), 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

JAVA Office文档在线编辑APIs

简单易用的Word, Excel, PowerPoint在线编辑接口

cloud.e-iceblue.cn

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 [我是8位的](#)
Powered by .NET 6 on Kubernetes